MASTER EII

Epreuve : CRYPTOGRAPHIE / M. BONNETON

JUILLET 2014 Durée : 2 heures

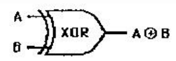
Calculatrice graphique autorisée – Aucun document

---

**Exercice 1 :** L'armée de César comptait plus de 1000 hommes et moins de 3000. Lorsqu'il voulut la dénombrer par groupes de 9, il restait 5 soldats, par groupes de 13, il en restait 8. En revanche, il pouvait faire des groupes de 11 sans qu'il ne reste de soldats. Combien y avait-il d'hommes dans son armée ?

**Exercice 2 :** Lester Hill (mathématicien américain, 1891-1961) a publié en 1929 une méthode de chiffrement dite polygraphique. On commence par associer à chaque lettre de l'alphabet un nombre compris entre 0 et 25 (A=0, B=1, ... , Z=25). On se donne une matrice A = $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

1. Vérifier que la matrice A permet de chiffrer correctement un message en clair et de la décoder.
2. Chiffrer le message « CODAGE »
3. Décoder le message « EELBZJ »




| A | B | Out |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

**Exercice 3 :** Compléter les réseaux de Feistel suivants :

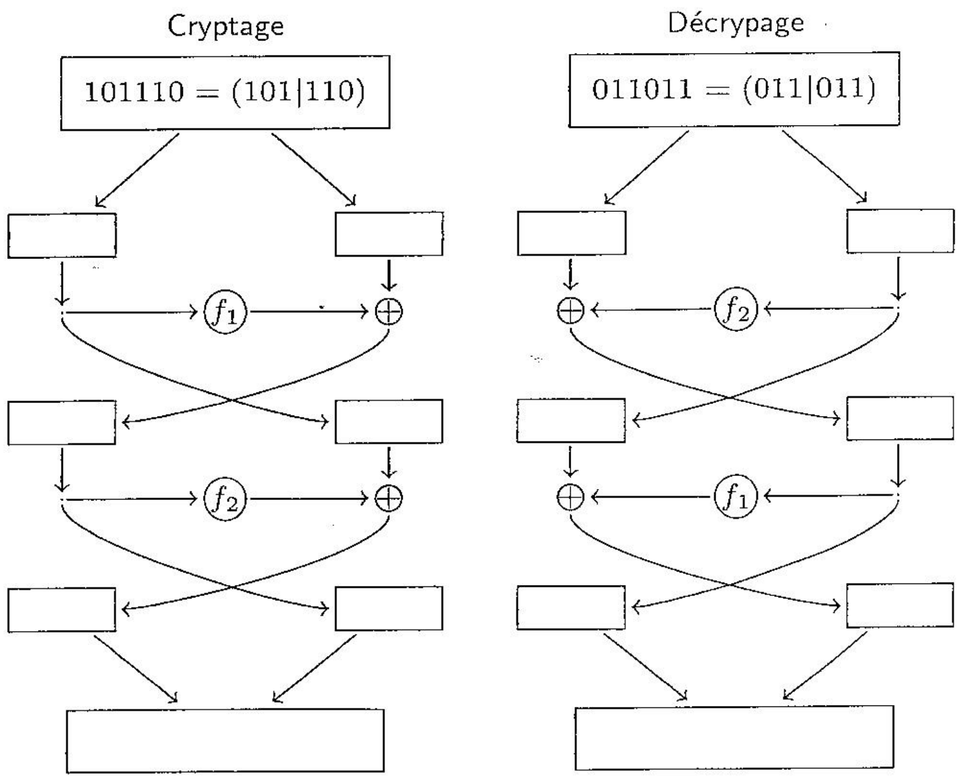
$w = 101110 \in \{0,1\}^6$

$f_1 : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}^3$

$000 \to 101$
$001 \to 100$
$010 \to 111$
$100 \to 000$
$011 \to 001$
$101 \to 101$
$110 \to 010$
$111 \to 110$

$f_2 : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}^3$

$000 \to 010$
$001 \to 001$
$010 \to 110$
$100 \to 111$
$011 \to 110$
$101 \to 011$
$110 \to 001$
$111 \to 100$



## Exercice 4 : *ATTAQUE DU RSA SUR MODULE COMMUN*

Alice, Bob et Charlie, trois dangereux terroristes, préparent un double attentat contre la maison blanche. Pour communiquer à ses deux complices le message m contenant l'heure de l'attentat (format hhmm), Alice leur envoie les messages chiffrés : $m_1 = 4166 \equiv m^{e1} \bmod n$ et $m_2 = 5094 \equiv m^{e2} \bmod n$

En utilisant leurs clés RSA publiques respectives : $(n, e_1) = (9313, 5465)$ & $(n, e_2) = (9313, 7807)$

Mais ces deux messages $m_1$ et $m_2$ sont interceptés ainsi que leurs clés publiques par les services du NCIS.

1/ En découvrant ces données, l'agent T. MC Guy s'écrit : « Mais ils ont pris le même module n et en plus les exposants de chiffrement publiques $e_1$ et $e_2$ sont premiers entre eux !!!! Quelle erreur !!! Je dois pouvoir déchiffrer ce message par une simple attaque sur module commun ! »

a/ Vérifiez que $e_1$ et $e_2$ sont premiers entre eux.

b/ Déterminez une identité de Bezout entre $e_1$ et $e_2$ : $e_1 \times d_1 + e_2 \times d_2 = 1$

c/ En partant de $m = m^1 = m^{e1 \times d1 + e2 \times d2} \bmod n$, montrer que l'on peut retrouver m à l'aide de $m_1$, $m_2$, $d_1$ et $d_2$.

d/ Sachant que $m_2^{-1} = 7940 \bmod n$, en déduire l'heure de l'attentat m.

2/ L'agent A. Sciuto marmonne : « C'est quoi cette attaque sur module commun ? Je suis sûre que ma calculatrice viendra à bout plus rapidement de la factorisation de n= 9313 !! »

a/ Déterminer la décomposition en facteurs premiers de 9313.

b/ En déduire la valeur de l'indicatrice d'Euler : $\phi(n)$

c/ Déterminer maintenant $c_1$ l'inverse de $e_1 \bmod \phi(n)$

d/ Retrouver l'heure de l'attentat m à partir de $m_1$ et $d_1$.

**Rappels et aide :**

- Pour montrer que deux nombres sont premiers entre eux, il faut calculer le PGCD des 2 nombres.
- Règles de calculs sur les puissances : $x^{ab+c} = x^{ab} . x^c = (x^a)^b . x^c = (x^b)^a . x^c$
- $x^{-a} = (1/x)^a$
- $4166^{10} = 5798 \bmod 9313$ $\quad$ $5094^{-7} = 7940^7 = 4835 \bmod 9313$
- Indicatrice d'Euler : $\phi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})...(1-\frac{1}{p_r})$
- $4166^5 = 1200 \bmod 9313$